

УТВЕРЖДАЮ

«___» _____ 201__ г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

Направление подготовки

МАТЕМАТИКА

Квалификация (степень) выпускника

Бакалавр

(бакалавр, магистр, дипломированный специалист)

Форма обучения

Очная

(очная, очно-заочная и др.)

1. Цели освоения дисциплины.

Целями освоения дисциплины «Алгебра» являются: получение базовых знаний по алгебре: комплексные числа и многочлены, матричная алгебра и решение систем линейных уравнений, конечномерные линейные пространства, линейные операторы и функционалы, канонический вид линейных операторов (жорданова форма, симметрические, ортогональные и унитарные операторы), билинейные формы, метрические линейные пространства, классификация квадрик, группы преобразований и классификация движений, основы тензорной алгебры, основные структуры современной алгебры (группы, кольца, поля), прикладные вопросы алгебры: теория неотрицательных матриц. При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения алгебраических задач и задач, связанных с приложениями алгебраических методов. Получаемые знания лежат в основе математического образования, необходимы для понимания и освоения всех курсов математики, компьютерных наук и их приложений.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата.

Дисциплина относится к профессиональному циклу. С курса алгебры и теории чисел начинается математическое образование. Знания, полученные в этом курсе, используются в аналитической геометрии, математическом анализе, функциональном анализе, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнениях, дискретной математике и математической логике, теории чисел, методах оптимизации и др. Слушатели должны владеть математическими знаниями в рамках школьной программы.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Алгебра и теория чисел»: ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-6, ПК-7, ПК-8, ПК-9, ПК-10, ПК-11, ПК-13, ПК-15, ПК-16, ПК-17, ПК-18, ПК-19, ПК-20, ПК-21, ПК-22, ПК-23.

В результате освоения данной дисциплины обучающийся должен:

- 1) Знать: основные понятия и результаты по алгебре (теория матриц, системы линейных уравнений, теория многочленов, линейные пространства и линейная зависимость, собственные векторы и собственные значения, канонический вид матриц линейных операторов, свойства билинейных функций, классификацию квадрик, основы теории групп колец, представлений конечных групп, основы теории решения задач неотрицательных матриц.). Студенты должны знать логические связи между ними.
- 2) Уметь: решать системы линейных уравнений, вычислять определители, исследовать свойства многочленов, находить собственные векторы и собственные значения, канонический вид матриц линейных операторов, классифицировать квадрики, основные свойства групп, колец, классифицировать представления конечных групп.
- 3) Владеть: методами линейной алгебры, теории многочленов, аппаратом теории групп и их представлений.

4. Структура и содержание дисциплины «Алгебра и теория чисел»:

Общая трудоемкость дисциплины составляет 15-17 зачетных единиц.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
-------	-------------------	---------	-----------------	--	---

				Лек.	Прак т. зан	Конт р	кол- локв	Сам	
1	Прямоугольные матрицы. Элементарные преобразования. Метод Гаусса. Решение квадратных систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными.	1	1	4	2			6	Контрольная работа, проверка домашнего задания.
2	Определители 2-го и 3-го порядка. Определители n-го порядка, их свойства и вычисление.	1	2	2	2			6	Контрольная работа, проверка домашнего задания.
3	Разложение определителя по строке (по столбцу). Миноры и алгебраические дополнения. Теорема об определителе с углом нулей.	1	3-5	10	10			15	Контрольная работа, проверка домашнего задания.
4	Правило Крамера для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными.	1	6	2	2			6	Контрольная работа, проверка домашнего задания.
5	Алгебра матриц. Теорема об определителе произведения матриц. Обратная матрица и её свойства.	1	7-8	6	4			11	Контрольная работа, проверка домашнего задания.
6	Определение группы. Простейшие свойства групп. Подгруппа. Циклические подгруппы. Полная линейная группа.	1	9-10	6				11	Контрольная работа, проверка домашнего задания.
7	Построение поля комплексных чисел. Геометрическое истолкование действий с комплексными числами. Возведение в степень и извлечение корня. Корни из единицы.	1	11-12	6	6			11	Контрольная работа, проверка домашнего задания.
8	Кольцо многочленов от одной переменной. Алгоритм деления с остатком. Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида. Взаимно простые многочлены. Неприводимые многочлены.	1	13-14	6	3			11	Контрольная работа, проверка домашнего задания.
9	Корни многочленов. Основная теорема алгебры (без доказательства). Многочлены неприводимые над полем комплексных и вещественных чисел	1	15	4	3			8	Контрольная работа, проверка домашнего задания.
10	Кольцо многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены. Основная теорема.	1	16-17	4	4			11	Контрольная работа, проверка домашнего задания.
11	Поле рациональных дробей. Правильные рациональные	1	18	4	2			6	Индивидуальное задание.

	дроби, их разложение на сумму простейших дробей.								
				54	36			102	
12	Аксиомы линейного пространства, простейшие следствия из них. Линейная зависимость и независимость. Примеры линейных пространств	2	1	3	2			6	Проверка домашнего задания, контрольная
13	Система образующих. Базис. Теорема о числе элементов базиса. Теорема о дополнении до базиса	2	2	2	1			4	Проверка домашнего задания, контрольная
14	Координаты вектора. Изменение координат вектора при изменении базиса пространства. Матрицы перехода.	2	2	1	1			2	Проверка домашнего задания, контрольная
15	Подпространства. Пересечение и сумма подпространств. Размерность суммы подпространств. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Ранг системы векторов. Прямая сумма подпространств.	2	3	6	2			12	Проверка домашнего задания, контрольная
16	Определение линейного отображения. Примеры. Ядро и образ отображения. Матрица и ранг линейного отображения. Использование матриц для записи линейного отображения.	2	4-5	8	2			16	Проверка домашнего задания, контрольная
17	Действия над линейными отображениями. Алгебра операторов. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к новому базису. Примеры.	2	6-7	7	4			14	Проверка домашнего задания, контрольная
18	Линейное пространство решений однородной системы линейных уравнений. Связь между решениями неоднородной и однородной систем.	2	8	4	2			8	Проверка домашнего задания, контрольная
19	Изоморфизмы линейных пространств. Группа автоморфизмов. Матрица обратного оператора.	2	9	2				4	Проверка домашнего задания, контрольная
20	Инвариантные подпространства и их свойства. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Свойства характеристического многочлена. Диагонализуемость.	2	9-10	8	4			16	Проверка домашнего задания, контрольная
21	Евклидовы и унитарные пространства, определение и	2	11	4	2			8	Проверка домашнего задания, кон-

	примеры. Норма оператора. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Расстояние.								трольная
22	Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Свойства ортонормированного базиса. Ортогональные дополнения.	2	12	4	3			8	Проверка домашнего задания, контрольная
23	Сопряжённое пространство. Сопряжённый оператор и его свойства. Матрица сопряжённого оператора.	2	13	4	2			8	Проверка домашнего задания, контрольная
24	Нормальный оператор. Матрица нормального оператора в унитарном и евклидовом пространстве.	2	14	4	1			8	Проверка домашнего задания, контрольная
25	Унитарный, ортогональный, самосопряжённый и кососимметрический операторы	2	15	4	2			8	Проверка домашнего задания, контрольная
26	Определение и диагонализированность билинейной формы. Конгруэнтность билинейных форм. Квадратичные формы. Закон инерции. Критерий Сильвестра. Положительные определённости квадратичной формы.	2	16	4	2			8	Проверка домашнего задания, контрольная
27	Приведение общего уравнения кривой второго порядка и поверхности второго порядка к каноническому виду. Инварианты.	2	17	3	4			6	Индивидуальное задание.
				68	34			136	
				122	70			238	Всего 430 часов

5. Образовательные технологии: активные и интерактивные формы, лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены, компьютеры. В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. В каждом семестре проводятся контрольные работы (на семинарах). Зачет выставляется после решения всех задач контрольных работ и самостоятельного выполнения индивидуального задания.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Контрольные, коллоквиумы оцениваются по пятибалльной системе. Экзамены оцениваются по системе: неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично. На практических занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке домашних заданий. На кафедре создана программа, генерирующая индивидуальные задания по материалам 1-го и 2-го семестров.

Варианты контрольных работ:

Контрольная работа № 1.

1. Решить систему линейных уравнений.

2. Найти обратную матрицу.
3. Вычислить определитель n -го порядка.
4. Найти наибольших общий делитель многочленов.
5. Разложить многочлен по степеням одночлена.
6. Найти все корни заданной степени из указанного комплексного числа.
7. Представить правильную дробь в виде суммы простейших дробей.
8. Представить заданный симметрический многочлен в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

Контрольная работа № 2.

1. Привести квадратичную функцию к диагональному виду.
2. Найти ортонормированный базис для симметрического (унитарного) оператора.
3. Найти канонический базис матрицы ортогонального оператора.
4. Найти каноническую форму уравнения квадратики.

Вопросы к экзамену по курсу «Алгебра и теория чисел» 1-ый семестр.

I

1. Элементарные преобразования матриц.
2. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений.
3. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Определители второго порядка.
4. Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными.
5. Система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. Формулы Крамера.
6. Построение определителя n -го порядка.
7. Свойства определителя n -го порядка относительно строк.
8. Критерий единственности решения системы n уравнений с n неизвестными.
9. Основная теорема для определителей.
10. Теорема о разложении определителя по произвольному столбцу.
11. Свойства определителя относительно столбцов.
12. Теорема об умножении на «чужие» алгебраические дополнения.
13. Теорема Крамера.
14. Теорема об определителе с углом нулей.
15. Сложение матриц и умножение их на число.
16. Умножение матриц.
17. Транспонирование матрицы. Свойства операции транспонирования.
- *18. Ранг матрицы.
19. Теорема об определителе произведения матриц.
20. Обращение матриц.
21. Решение матричных уравнений. Формулы Крамера.

II

1. Gruppoид, полугруппа, моноид.
2. Группа и подгруппа.
3. Кольцо и подкольцо.

4. Поле и подполе.
5. Построение поля комплексных чисел.
6. Алгебраическая форма комплексного числа.
7. Тригонометрическая форма комплексного числа.
8. Извлечение корня из комплексного числа.
9. Корни n -ой степени из единицы.
10. Первообразные корни.
11. Построение кольца многочленов от одной переменной.
12. Алгоритм деления с остатком.
13. Алгоритм Евклида.
14. Наибольший общий делитель многочленов.
15. Взаимно простые многочлены.
16. Теорема Безу. Схема Горнера.
17. Формулы Виета. Каноническое разложение многочлена в $C[x]$ и $R[x]$.
18. Кольцо многочленов от n переменных.
19. Симметрические многочлены.
20. Основная теорема о симметрических многочленах.
21. Неприводимые многочлены. Критерий Эйзенштейна неприводимости в $Z[x]$.
22. Рациональные дроби.

Вопросы к экзамену по курсу «Линейная алгебра» 2-ой семестр.

I

1. Определение линейного пространства. Примеры.
2. Линейная зависимость и независимость векторов.
3. Теорема о числе элементов базиса и теорема о дополнении до базиса.
4. Координаты вектора. Изменение координат вектора при изменении базиса пространства.
5. Подпространства.
6. Размерность суммы подпространств.
7. Ранг матрицы. Ранг системы векторов.
8. Прямая сумма подпространств.
9. Линейные отображения. Примеры. Ранг линейного отображения.
10. Матрица линейного отображения. Примеры. Запись линейного отображения с помощью матриц.
11. Сумма отображений и произведение отображения на число.
12. Произведение отображений.
13. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к новому базису.
14. Ранг произведения матриц.
15. Однородная система линейных уравнений. Связь с неоднородной.
16. Изоморфизмы линейных пространств.
17. Автоморфизмы линейного пространства. Матрица обратного оператора.
18. Инвариантные подпространства.
19. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
20. Свойства характеристического многочлена. Теорема Гамильтона-Кэли.

21. Условие диагоналируемости матрицы линейного оператора.

II

1. Определение евклидова и унитарного пространств.
2. Норма вектора. Неравенство Коши-Буняковского. Расстояние.
3. Ортогональность. Процесс Грама-Шмидта.
4. Ортонормированный базис и его свойства.
5. Ортогональные дополнения.
6. Изоморфизм унитарных пространств.
7. Сопряжённое пространство.
8. Сопряжённый оператор.
9. Нормальный оператор. Теорема о каноническом виде нормального оператора.
10. Теорема об инвариантном подпространстве линейного оператора в евклидовом пространстве.
- *11. Теорема о каноническом виде матрицы нормального оператора в евклидовом пространстве.
12. Унитарный (ортогональный) оператор.
13. Самосопряжённый оператор.
14. Кососимметрический оператор.
15. Билинейные формы.
16. Конгруэнтность билинейных форм.
17. Квадратичные формы. Методы приведения.
18. Закон инерции квадратичных форм.
19. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестера.
20. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.
21. Инварианты уравнения кривой второго порядка.
22. Исследование общего уравнения поверхности второго порядка.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. М.: Физ.-мат. лит., 2000.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. М.: Физ.-мат. лит., 2000.
3. Михалев А.В., Михалев А.А., Начала алгебры, часть 1: [учеб.пособие]. М.: Интернет-Ун-т Информ. Технологий, 2005. (Основы информатики и математики).

б) дополнительная литература:

1. Сборник задач по алгебре. Под. ред. А. И. Кострикина. М: МАИК НАУКА, 2001.
2. Проскуряков И.В., Сборник задач по линейной алгебре, М., любой год издания.
3. Фаддеев Д.К., Соминский И.С., Сборник задач по высшей алгебре, М., любой год издания.
4. Артамонов В.А., Латышев В.Н. Линейная алгебра и выпуклая геометрия. М.; Изд-во "Факториал Пресс". 2004.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

<http://mech.math.msu.su/department/algebra>

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) «Алгебра и теория чисел»: учебные аудитории для проведения лекционных и семинарских занятий.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций и ПрООП ВПО по направлению Математика и профилю подготовки .

Авторы: доцент Фомин А.С., преподаватель Седов А.В.

Рецензент(ы) _____

Программа одобрена на заседании кафедры «Теории вероятностей и анализа данных» от 1 февраля 2011 года, протокол № 2.